Universidade Federal do Ceará
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
PIBIC 2020/2021 - Edital Nº 1/2020

Dominação romana em classes de grafos

Resumo

Dado um grafo simples G = (V(G),E(G)), um conjunto dominante é um subconjunto de vértices D de V(G) tal que todo vértice de G que não pertence a D é adjacente a algum vértice em D. O número de dominação de um grafo G, denotado por gamma(G), é a cardinalidade do menor conjunto dominante de G. Conjuntos dominantes em grafos foram introduzidos em 1958 e, no decorrer dos anos, surgiram diversas variações da definição clássica de conjunto dominante. Neste projeto, propomos o estudo de uma variação denominada dominação romana, definida a seguir.

Uma função f de V(G) em {0,1,2} é uma função de dominação romana (FDR) em um grafo G se todo vértice u pertencente a V(G) com f(u) = 0 possui um vizinho v com f(v) = 2. O peso de uma FDR f é o valor omega(f) que é o resultado da soma de todos os rótulos de vértices de G. O número de dominação romana gammaR(G) de um grafo G é o menor peso omega(f) dentre todas as FDRs f de G. Conjuntos dominantes e dominação romana são conceitos relacionados, de modo que, dado um conjunto dominante S de G, é possível obter uma FDR f de G com peso omega(f) = 2|S|. Por outro lado, dada uma FDR f de G, podemos obter um conjunto dominante S de G que é a união dos conjuntos V1 e V2, formados pelos vértices com rótulos 1 e 2, respectivamente.

O objetivo geral deste projeto consiste em determinar o número de dominação romana para grafos com grau máximo três. Na dificuldade de se determinar o número de dominação romana para as subclasses estudadas, realizar uma análise da complexidade para estas subclasses. Como objetivos específicos: determinar gammaR(G) para os snarks de Loupekine, snarks de Blanusa, snarks de Goldberg, grafos com grau máximo três e sem vértices adjacentes de grau máximo, grafos de Petersen generalizados e grafos cúbicos hamiltonianos.

A metodologia utilizada neste projeto será a usual desta área de pesquisa. Boa parte dos estudos serão conduzidos individualmente pelo bolsista, com acompanhamento semanal do professor orientador.

1. Introdução

No jogo de xadrez internacional, a peça mais dominante é a rainha. Ela pode, em um movimento, avançar(ou atacar) qualquer número de casas na vertical, horizontal e diagonal do tabuleiro (assumindo que não existem outras peças no seu caminho). Mesmo assim, uma única rainha não pode chegar a todas as outras casas no tabuleiro de xadrez 8 x 8 de onde fica com um único movimento. Em 1862, C. F. Jaenisch[9] fez a seguinte pergunta: "Qual é o número mínimo de rainhas a serem colocadas em um tabuleiro de xadrez 8 x 8, a fim de garantir que cada casa seja atacada por pelo menos uma rainha?"

O problema acima pode ser modelado utilizando a área da Ciência da Computação denominada Teoria dos Grafos. Um grafo G é um par ordenado (V(G),E(G)) formado por um conjunto finito não-vazio de vértices V(G) e um conjunto de arestas E(G) de pares não-ordenados de elementos distintos de V(G). Modelamos este problema associando um vértice para cada casa do tabuleiro de xadrez e dois vértices são adjacentes no grafo se, e somente se, a peça pode mover-se para casa representada pelo vértice. Um conjunto dominante é um subconjunto de vértices D de V(G) tal que todo vértice de G que não pertence a D é adjacente a algum vértice em D. O número de dominação de um grafo G, denotado por gamma(G), é a cardinalidade do menor conjunto dominante de G. Deste modo, determinar gamma(G) para o grafo G construído a partir do tabuleiro de xadrez é equivalente a determinar o número mínimo de rainhas para o problema do tabuleiro. Na verdade, este problema é considerado a origem do estudo de conjuntos dominantes em grafos.

Foi apenas em 1958 que o matemático Claude Berge[2] definiu matematicamente o conceito de dominação em grafos, e desde então mais de 1000 artigos foram publicados sobre este tópico. Em 1962, Oystein Ore[12] empregou pela primeira vez os termos "conjunto dominante" e "número de dominação". Ore também exibiu uma condição necessária e suficiente para que um conjunto dominante D seja minimal (esse é considerado o primeiro teorema envolvendo conjuntos dominantes) e estabeleceu também quando um grafo pode ter seu conjunto de vértices particionado em dois conjuntos dominantes. A notação gamma(G) para o número de dominação de um grafo G foi introduzida por Cockayne e Hedetniemi[4] em 1977 em uma pesquisa que reuniu alguns poucos resultados conhecidos naquela época sobre conjuntos dominantes em grafos. A partir de então, a notação foi aceita pela comunidade científica.

No decorrer dos anos, conforme o estudo deste tema tornou-se mais intenso, surgiram diversas variações da definição clássica de conjunto dominante[3,5,7,8,10,15]. Neste projeto, propomos o estudo de uma variação denominada "dominação romana", introduzida em 2004 por Cockayne et al.[5] e motivada por um artigo de matemática recreativa escrito por Ian Stewart[15] em 1999.

No artigo de 1999, intitulado "Defend the Roman Empire!"[15], Ian Stewart discutiu uma estratégia que foi usada pelo Imperador Constantino para defender o Império Romano no período do século III. No início daquele século, o Império Romano estava sob ataque e Constantino tinha que decidir a melhor maneira de alocar suas tropas para proteger todas as 8 regiões subordinadas. A tática do imperador foi colocar as tropas de tal maneira que cada região ou era protegida por sua própria tropa ou era passível de ser protegida por um território vizinho que continha duas tropas (uma das quais podia ser enviada para a região desprotegida em um passo se um conflito ocorresse). Dada a tática traçada por Constantino, surgiu a seguinte pergunta: qual é o menor número de tropas necessárias para garantir que o império esteja seguro?

Motivados pelo problema de Stewart, Cockayne et al.[5] introduziram a noção de dominação romana em grafos, que é definida a seguir. Uma função f de V(G) em {0,1,2} é uma função de dominação romana (FDR) em um grafo G se todo vértice u pertencente a V(G) com f(u) = 0 possui um vizinho v com f(v) = 2. O peso de uma FDR f é o valor omega(f) que é o resultado da soma de todos os rótulos de vértices de G. O número de dominação romana gammaR(G) de um grafo G é o menor peso omega(f) dentre todas as FDRs f de G.

Definimos ainda a partição ordenada (V0, V1, V2) de V(G) induzidas por f, onde Vi = {v pertencente a V(G) | f(v) = i}, para i pertencente a {0, 1, 2}. Como existe uma correspondência 1-1 entre f: V(G) em {0, 1, 2} e a partição ordenada (V0, V1, V2), denotamos f = (V0 , V1, V2). Nessa representação, o peso de uma FDR f é omega(f) = |V1| 2|V2|. Uma função de dominação romana f de um grafo G é chamada de gammaR(G)-função ou gammaR-função se ela é uma FDR e se omega(f) = omegaR(G). Um resultado básico conhecido é que, dado um conjunto dominante S de G, podemos obter uma FDR f = (V0, V1, V2) tal que V0 = V(G)\S, V1 é vazio e V2 = S, com peso omega(f) = 2|S|. Por outro lado, dada uma FDR (V0, V1, V2) de G, podemos obter um conjunto dominante S que é a união dos conjuntos V1 e V2 de G. Um exemplo de conexão entre o conceito de conjunto dominante mínimo e dominação romana ótima foi apresentado por Cockayne et al., que provaram que, para qualquer grafo G, gamma(G) <= gammaR(G) <= 2*gamma(G).

Assim como outros problemas de dominação em grafos, o problema de dominação romana também pode ser utilizado na alocação de servidores sem fio através de redes (ver referência [13]) ou como estratégia militar, como foi mostrado em um artigo onde é apontado a utilidade da teoria dos grafos e problemas de otimização no mundo real (ver referência [1]). Existem atualmente vários artigos sobre o problema de dominação romana e suas variantes. Recentemente, este problema foi abordado de forma mais algorítmica por ReVelle, Toregas e Falkson[14]. Sabemos que existem algoritmos em tempo linear que podem resolver o problema em algumas classes de grafo, como por exemplo, cografos, árvores e grafos de intervalo. Porém, em um caso geral, o problema de encontrar o número de dominação romana é NP-difícil.

Neste projeto, propomos a investigação do problema de dominação romana para classes de grafos com grau máximo igual a três. A classe dos grafos de grau no máximo três é uma classe bastante investigada em Teoria dos grafos, dado que muitos problemas nesta área são difíceis de se resolver para esta classe de grafos, em particular para os grafos cúbicos (3-regulares), que são grafos em que todos os vértices possuem grau igual a 3.

Uma classe de grafos cúbicos importante na Teoria dos Grafos é a classe dos grafos snarks, definida a seguir. Uma ponte em um grafo G é uma aresta cuja remoção aumenta o número de componentes conexas de G. Snarks são grafos conexos sem ponte, que não admitem uma atribuição de cores às suas arestas de modo que quaisquer duas arestas adjacentes recebam cores distintas. O estudo dos snarks começou em 1880, quando P. G. Tait provou que o famoso Teorema das Quatro Cores é equivalente à afirmação de que todo grafo planar conexo e sem ponte pode ter suas arestas coloridas propriamente com 3 cores. Essa equivalência justifica a importância histórica dos snarks. Em 2018, Maksimovic et al.[11] determinaram o número de dominação romana para a classe dos snarks-flor (flower snarks, em inglês). Exemplos de snarks para os quais o número de dominação romana ainda não foi determinado e que pretendemos investigar neste trabalho são: os snarks de Goldberg, os snarks de Blanusa e os snarks de Loupekine.

Outras classes para as quais o número de dominação romana também não foi determinado e que pretendemos investigar são: grafos com grau máximo três e que não possuem vértices de grau máximo adjacentes, grafos cúbicos hamiltonianos e, por fim, os grafos de Petersen generalizados, definidos a seguir. O grafo de Petersen generalizado P(n,k) é o grafo com exatamente 2n vértices cujo conjunto de vértices é V(P(n,k)) = {v_i,u_i | 0 <= i <= n-1} e cujo conjunto de arestas é E(P(n,k)) = {v_iv_{i 1}, v_iu_i, u_iu_{i k} | 0 <= i <= n-1, com índices tomados modulo n}. Alguns membros desta família já tiveram seus números de dominação romana determinados. Por exemplo, em 2009, F. Xueliang et al.[17] determinaram o número de dominação romana dos grafos de Petersen generalizados P(n,2k 1) (n diferente de 4k 2, n congruente a 0 (mod 4) e 0 <= k <= n/2), P(n,1) (com n não congruente a 2 (mod 4)), P(n,3) (com n >= 7, n não congruente a 3 (mod 4)) e, por fim, P(11,3). O número de dominação romana dos grafos P(n,2), com n >= 5, foi determinado em 2011, por Wang et al.[16].

Uma vez que existem conexões entre o conceito clássico de conjuntos dominantes em grafos e o conceito mais recente de dominação romana, o estudo desta última contribui para o avanço do problema para as classes propostas assim como também tem implicações no conceito clássico relacionado. Além disso, a área de dominação em grafos é uma área de intensa pesquisa na teoria dos grafos e que tem atraído a atenção de importantes pesquisadores.

2. Perguntas de Partida

1. É possível determinar o número de dominação romana dos Snarks de Goldberg, dos Snarks de Blanusa e dos Snarks de Loupekine? Qual estratégia podemos utilizar? Quais resultados existentes

na literatura para grafos cúbicos podem nos ajudar?

2. É possível determinar o número de dominação romana dos grafos com grau máximo três que não possuem vértices adjacentes de grau máximo?

3. Sabe-se que o número de dominação romana já foi determinado para algumas subfamílias infinitas de grafos de Petersen generalizados. Quais as técnicas utilizadas para os casos já provados? Por que estas técnicas não podem ser expandidas para provar os casos restantes? Quais as dificuldades encontradas?

4. Qual a complexidade computacional do problema de determinar o número de dominação romana para as classes que pretendemos investigar? Será que, para todas elas, existe um algoritmo polinomial? Quais resultados de complexidade são importantes serem estudados?

3. Hipóteses

Primeira hipótese: Determinar o número de dominação romana das famílias de snarks listadas neste projeto é um problema de complexidade polinomial. Assim como para grafos de Petersen generalizados e também para grafos com grau máximo três e sem vértices adjacentes de grau máximo.

Segunda hipótese: É possível que o problema de determinar o número de dominação romana para os grafos cúbicos hamiltonianos e outras classes de grafos cúbicos seja NP-Completo ou NP-difícil.

4. Objetivos

Objetivo Geral: Investigar o problema de dominação romana para a classe de grafos com grau máximo três e tentar determinar o número de dominação romana para as classes investigadas. Relacionar os resultados encontrados com conceitos relacionados. Na impossibilidade ou dificuldade de se determinar o número de dominação romana para as classes de grafos estudadas, realizar uma análise da complexidade do problema para estas classes.

Objetivos Específicos: Determinar o número de dominação romana para cada uma destas classes:
- snarks de Loupekine
- snarks de Blanusa
- snarks de Goldberg
- grafos com grau máximo três e sem vértices adjacentes de grau máximo
- grafos de Petersen generalizados
- grafos cúbicos hamiltonianos

5. Materiais e Métodos

Os métodos que serão usados neste projeto são os usuais desta área de pesquisa. Boa parte dos estudos deverão ser conduzidos individualmente pelo aluno bolsista, com acompanhamento semanal do professor orientador. Toda semana haverá reunião do orientador com o bolsista. Participação em reuniões de discussão com o professor e outros possíveis estudantes de mestrado ou de graduação do campus serão atividades regulares durante todo o decorrer do projeto.

6. Referências Bibliográficas

1. ARQUILLA, J.; FREDRICKSEN, H. Graphing an optimal grand strategy. Military Operations Research, Military Operations Research Society, v. 1, n. 3, p. 3-17, 1995.

2. BERGE, C. Theory of graphs and its applications. 1962. Methuen, London.

3. CHAMBERS, E. W.; KINNERSLEY, B.; PRINCE, N.; WEST, D. B. Extremal problems for roman Domination. SIAM Journal on Discrete Mathematics, SIAM, v. 23, n. 3, p. 1575-1586, 2009.

4. COCKAYNE, E. J.; HEDETNIEMI, S. T. Towards a theory of domination in graphs. Networks, Wiley Online Library, v. 7, n. 3, p. 247-261, 1977.

5. COCKAYNE, E. J.; DREYER JR, P. A.; HEDETNIEMI, S. M.; HEDETNIEMI, S. T. Roman domination in graphs. Discrete Mathematics, Elsevier, v. 278, n. 1, p. 11-22, 2004.

6. FU, X.; YANG, Y.; JIANG, B. On the Domination Number of Generalized Petersen Graphs P(n, 3). Discrete Mathematics, v. 309, p. 2445-2451, 2007.

7. HENNING, M. A.; HEDETNIEMI, S. T. Defending the Roman Empire - A new strategy. Discrete Mathematics, v. 266, p. 239-251, 2003.

8. HAYNES, T.W.; HEDETNIEMI, S.T.; SLATER, P.J. Fundamentals of Domination in Graphs. [S.l.]: Marcel Dekker, Inc., New York, 1998.

9. JAENISCH, C. F. Applications de lAnalyse Mathematique an Jenudes Echecs. [S.l.]: Petrograd, 1862.

10. LIU, C-H.; CHANG, G. J. Upper bounds on Roman domination numbers of graphs. Discrete Mathematics, v. 312, p. 1386-1391, 2012.

11. MAKSIMOVIC, Z.; KRATICA, J.; SAVIC, A.; BOGDANOVIC, M. Some static roman domination numbers for flower snarks. In: XIII Balkan Conference on Operational Research Proceedings, 9-16, 2018.

12. ORE, O.; ORE, Y. Theory of graphs. [S.l.]: American Mathematical Society Providence, RI, 1962. v. 38.

13. PAGOURTZIS, A.; PENNA, P.; SCHLUDE, K.; STEINHOFEL, K.; TAYLOR, D. S.; WIDMAYER, P. Server placements, Roman domination and other dominating set variants. In: Foundations of Information Technology in the Era of Network and Mobile Computing: IFIP 17th World Computer Congress, p. 280-291. [S.l.]: Springer, 2002.

14. REVELLE, C. S.; ROSING, K. E. Defendens imperium romanum: a classical problem in military strategy. American Mathematical Monthly, JSTOR, p. 585-594, 2000.

15. STEWART, I. Defend the roman empire! Scientific American, v. 281, p. 136-138, 1999.

16. WANG, H.; XU, X.; YANG, Y.; JI, C. Roman domination number of Generalized Petersen Graphs P(n,2). Ars Combinatoria, v. 112, p. 479-492, 2011.

17. XUELIANG, F.; YUANSHENG, Y.; BAOQI, J. Roman domination in regular graphs. Discrete Mathematics, v. 309, p. 1528-1537, 2009.

7. Plano de Atividades

Mês	Bolsista 1
1	Estudo dirigido da biliografia básica, através de leitura e resolução de exercícios relacionados ao tema de estudo
2	Estudo dirigido da biliografia básica, através de leitura e resolução de exercícios relacionados ao tema de estudo
3	Estudo dirigido complementado com mini-apresentações dos resultados lidos
4	Trabalho na classe dos grafos com grau máximo três sem vértices adjacentes de grau máximo (apresentação dos estudos feitos até este mês nos Encontros Universitários do campus de Quixadá)
5	Trabalho na classe dos snarks de Goldberg
6	Trabalho na classe dos snarks de blanusa
7	Trabalho na classe dos snarks de Loupekine
8	Trabalho na classe dos grafos de Petersen generalizados
9	Trabalho na classe dos grafos cúbicos hamiltonianos e estudo de resultados de complexidade
10	Trabalho na classe dos grafos cúbicos hamiltonianos e estudo de resultados de complexidade
11	Estudo de uma possível prova de complexidade para a família dos grafos cúbicos hamiltonianos
12	Finalização dos resultados obtidos, escrita de relatório e preparação de apresentação